BRETT UND FIGUR IM
BANNE DER DUALITÄT
VON
Dr.E.v.FABRIZI
HALLEIN
1945.

Dr. Fabel hat in der Zeitschrift Sphinx (1933,4) in einer sehr fesselnden Arbeit verschiedene Ausdrücke für die Berechnung der Höchstzahl der Schlüsselzüge abgeleitet. Es ist von Interesse zu verfolgen, auf welchem Wege unsere Notation (" Das Schachbrett als Zahlenfeld") zum gleichen Ziele führt.

Es sei, wie in der zitierten Arbeit +) (ab) ein Wertepaar, wo $a_\nu, b_\mu = 1,2,\ldots\ldots{}^{\nu,\mu} \ldots n$ und $a_\nu b_\mu \neq a_\mu b_\nu$, A_{ik} eine Operation, die ein beliebiges Wertepaar (ab) in das Wertepaar (a+i,b+k) transformiert, wo A_{ik} im allgemeinen dem Gesetz der Kommutativität gehorcht, also $A_{ik} = A_{ki}$, und wo $i,k \gtreqless 0$, wobei allerdings i,k so gewählt werden müssen, daß im resultierenden Wertepaar (a+i,b+k) wieder nur die Zahlen zwischen 1 und n durchlaufen werden ~~müssen.~~ können.

Unter Berücksichtigung der dort angewandten Notation schreiben wir daher A_{ik}, wenn sowohl i als auch k sowohl positive als auch negative ganzzahlige Werte annehmen können und $A_{ik} = A_{ki}$, ferner $A_{\overline{ik}}$, wenn $A_{ik} \neq A_{ki}$, endlich A_{+ik}, wenn bei i nur positive, hingegen bei k beide Zeichen, oder A_{+i-k}, wenn bei i nur positive, bei k nur negative Zeichen zulässig sind. Das Symbol, $A_{ik,i'k'}$ gestattet sowohl die Anwendung der Operation A_{ik} als auch die der Operation $A_{i'k'}$ auf das Zahlenpaar (ab) usw.

Aus der Charakteristik der so definierten ganz allgemeinen A_{ik} Operation folgen sofort folgende Dualitäten: ++)

Dualität I: Vertauschbarkeit von i und k; Sie verliert ihren Sinn bei Jdentität der beiden Indices oder nur dann bei deren Nichtidentität, wenn Nichtkommutativität besonders gefordert wird.

Dualität II: Verschiedene Vorzeichen sowohl von i als auch von k. Sie verliert ihren Sinn, wenn einer der beiden Indices gleich Null wird, oder wenn in besonderen Fällen bei einem oder beiden Indices nur ein Vorzeichen zulässig ist.

Dualität III: Gleichsinnigkeit, bzw. Ungleichsinnigkeit der Zuordnung bezüglich der Vorzeichen, Sie entfällt, wenn nur eine Zuordnung a) möglich oder b) zulässig ist, so daß höchstens 2^3 verschiedene Zuordnungsmöglichkeiten von i und k an a und b gegeben sind, und zwar im einzelnen:

a + i, b + k	und	a + k, b + i
a + i, b − k		a + k, b − i
a − i, b + k		a − k, b + i
a − i, b − k		a − k, b − i

+) Fabrizi, Das Schachbrett als Zahlenfeld 1943

++) Über die Kombinatorik der Freiheitsgrade (Anzahl der Dualitäten) siehe Seite

Da diese Paare nur Zahlen zwischen 1 und n enthalten dürfen, kommen für diese wie oben definierte allgemeine Operation A_{ik} nur die Zuordnungen von (n-i) Zahlen zu (n-k) Zahlen in Betracht, wobei zu berücksichtigen ist, daß (ab) $\neq$ (ba) ist, das heißt, es liefert jede der (n-i) Zahlen (n-k) Wertepaare und umgekehrt, mit anderen Worten, es gibt (n-i)(n-k) Zuordnungen für je ein bestimmtes i und k.

Für die Panfigur nun, die so charakterisiert, daß in A_{ik} die Indices sämtliche erlaubte Werte ohne irgendwelche regelnde Bindung zwischen i und k durchlaufen können (nur gleichzeitiges Nullwerden von i und k sei unzulässig, weil dies nicht als Zug im schachlichen Sinne gewertet werden kann), ist zu bilden:

$$\sum_{i=0,\,k=1}^{i,k=n-1}(n-i)(n-k) = \begin{aligned}[t] & n(n-1)+n(n-2)+\ldots n[n-(n-1)] \\ & +(n-1)(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots(n-1)[n-(n-1)] \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & [n-(n-1)](n-1)+[n-(n-1)](n-2)+\ldots[n-(n-1)][n-(n-1)] \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck stellt die erste Zeile die Summe der Operationsmöglichkeiten der Operation A_{oi} dar, da sie sämtliche Faktoren vom Typ (n-0)(n-i) enthält.

Bei dieser Operation A entfällt also Dualität II, da nicht beide Indices beide Vorzeichen annehmen können, es ist also der Entwicklung dieser ersten Zeile der Faktor 2^{3-1} voranzustellen.

In jeder der folgenden Zeilen erscheint ein Faktor vom Typ $(n-i)^2$, der auf eine Operation A_{ii} hinweist, welchen Faktoren aufsummiert, gleichfalls der Faktor 2^{3-1} voranzusetzen ist, da bei allen diesen Operationen Dualität I entfällt (wegen Identität von i und k, k = i = i).

Endlich erscheint jeder Faktor vom allgemeinen Typ (n-i)(n-k) in diesen restlichen Zeilen doppelt, sodaß zur Ermittlung des wahren Wertes halbiert werden muß, also ist der Faktor $2^3/2$ vorzusetzen, da bei allen diesen Operationen alle 3 Dualitäten existenzfähig sind.

Wir haben also ganz einheitlich für die gesamte Entwicklung den Faktor 4 erhalten.

$$N = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2(n^2-1)$$

Was offensichtlich stimmt, denn die wie oben definierte Panfigur kann von jedem der insgesamt n^2 Felder die restlichen (n^2-1) Felder bestreichen.

Um den bisher ganz allgemein behandelten Indices i,k spezielle Werte zu erteilen, schreiben wir

$$i = \varphi(l), \quad K = \psi(l)$$

wo $\varphi(l)$ und $\psi(l)$ ganzzahlige, algebraische Funktionen bedeuten, $\psi(l) > \varphi(l)$ sein soll und:

l = m+d, m+2d,.... m+νd (diskontinuierliche Form)
oder im besonderen Falle
m = 0, d = 1
l = 1, 2, ...p, (kontinuierliche Form),

das heißt, es sollen i und k nicht alle beliebigen Werte formlos durchlaufen können, sondern sollen durch ein ganz bestimmtes, ordnendes Gesetz miteinander verknüpft sein. Damit soll unter den $n^2(n^2-1)$ Operationsmöglichkeiten der ganz allgemeinen A Operation eine bestimmte Auslese getroffen werden.

Wir müssen dann, analog oben, um die Gesamtzahl der Operationsmöglichkeiten von $A_{\varphi(l),\psi(l)}$ zu ermitteln, die Entwicklung von

$$\sum_{l=l_0}^{l=\max p} [n-\varphi(l)][n-\psi(l)]$$

durchführen, wo p maximal so ~~entwickelt~~ gewählt werden muß, daß in Anbetracht von $\psi(l) > \varphi(l)$

$$\varphi(l) < \psi(p) < n < \psi(p+1)$$

Bei dieser Entwicklung sind sämtliche Glieder vom Typ $n(n-l_r)$, da der Operation A_{0,l_r} zugeordnet, wegen der dort entfallenden Dualität II (also Anzahl der Freiheiten q = 2) mit 2^2, und ebenso sämtliche Glieder vom Typ $(n-l_s)^2 = (n-l_s)(n-l_s)$, da der Operation A_{l_s,l_s} zugeordnet, wegen der dort entfallenden Dualität I (infolge Jdentität $l_s = l_s$, also q = 2) ebenfalls mit 2^2, die restlichen Glieder vom Typ $(n-l_r)(n-l_y)$ jedoch wegen Bestehenbleibens aller 3 Dualitäten (q=3) mit 2^3 zu multiplizieren.

Ist die Operation nicht kommutativ ($A_{\overline{\varphi(l),\psi(l)}}$) oder irreversibel, weil bei $\varphi(l)$ oder bei $\psi(l)$ oder bei beiden nur ein bestimmtes Vorzeichen zulässig ist, sind die entsprechenden resultierenden niedrigeren Freiheitsgrade q zu berücksichtigen, was bei der Wahl des Faktors 2^q, mit dem die Entwicklung--oder Teile dieser-- zu multiplizieren ist, zur Auswirkung kommt.

So läßt sich beispielsweise für die Summe der Operationsmöglichkeiten N der Operation $A_{ls,lt}$ (l =0,1,2,....p) die Entwicklung

$$N = 2^2 n(n-s) + 2^2\left(n-\frac{st}{t-1}\right)^2 + 2^3\big\{(n-1-s)(n-t) + (n-2-s)(n-2t)\ldots.(n-p-s)(n-pt)\big\}$$

angeben, wo in der letzten Reihe nur das Glied (n-x-s)(n-xt), wo $x = \frac{s}{t-1}$, fehlt; $p = \frac{n-n(\mathrm{mod}\ t)}{t}$

Hiemit ist das anzuwendende allgemeine Verfahren genügend beschrieben und wir können uns nun mehr innerhalb aller dieser Operationen $A_{\varphi(\iota),\psi(\iota)}$ wieder einer ganz speziellen Untergruppe von Operationen zuwenden, und zwar solchen, wo

$$i = \varphi(\iota) = v\iota, \qquad k = \psi(\iota) = u\iota, \qquad u > v$$

das sind also solche Operationen, bei denen i und k in ganz bestimmten ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen und die den Dawson'schen "Sauteur" und "Coursiers" Typ beinhalten.

Wir sehen aus dieser Systematik, daß die Coursiersform in den meisten Arbeiten anderer Autoren die allgemeinste Formselbst nur eine Untergruppe dritter Ordnung der A_{ik}- Gruppe darstellt. Hier sind wir jedoch bei unserer Durchforschung von der noch allgemeineren Form erster Ordnung A_{ik} ("Panfigur", i und k nehmen jeden beliebigen der überhaupt erlaubten Werte an) und zweiter Ordnung $A_{\varphi(\iota),\psi(\iota)}$ (i und k sind durch ein ganz allgemein algebraisches Gesetz miteinander verknüpft) ausgegangen. Speziell die Berechnung der letzteren würde nun ohne Einführung unserer Notation und Berücksichtigung des Dualitätsprinzipes bei elementarer Behandlung große Schwierigkeiten bereiten, wenn nicht die Anschauung zu Hilfe genommen wird.

Entsprechend der Definition $u > v$, $k = u\iota$, der vorausgegangenen Definition a+k, b+k = maximal n und der zwangsläufigen Koppelung von i und k folgt für die höchste Zahl p des Laufindex ι aus $a+up = n$,

$a = n(\mathrm{mod}\ u)$, $n(\mathrm{mod}\ u)+up = n$

$$p = \frac{n-n(\mathrm{mod}\,u)}{u}$$

Dieselbe Beziehung folgt aus $b+up = n$
Da weiters definiert wurde $i = v\iota$, $k = u\iota$, folgt für den allgemeineren Fall, daß der Laufindex $\iota = m+\nu d$, also selbst wieder eine Funktion von ν ist, d.h. für den allgemeineren Fall der diskontinuierlichen Form als Summe der Operationsmöglichkeiten:

$$N = 2^q \sum_{\iota=1}^{\iota=p} (n-v\iota)(n-u\iota), \qquad \text{und da} \quad \iota = m+\nu d$$

$p = m+\nu_p d$ (für die Höchstzahl des laufenden Index)

Weiters

$$N = 2^q \sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_p} [n-v(m+\nu d)][n-u(m+\nu d)]$$

$$= 2^q \left\{ n^2 \nu_p - n(u+v)\left[m\nu_p + d\sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_p}\nu\right] + uv\left[m^2\nu_p + 2md\sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_p}\nu + d^2\sum_{\nu=1}^{\nu=\nu_p}\nu^2\right]\right\}$$

wo p wie oben $p=\dfrac{n-n(\mathrm{mod}\,u)}{u}$ und $\nu_p = \dfrac{(p-m)-(p-m)\ \mathrm{mod}\ d}{d}$

Dieser Ausdruck gilt für sämtliche Sauteur und Coursier-Formen und ist allgemeiner gehalten als die entsprechenden Ausdrücke bei Dr. Fabel und M.Kuehl, da er auch für sämtliche diskontinuierliche Coursier-Formen gilt, deren Laufgesetz sich auf eine beliebige arithmetische Progression bringen lassen. Beim Einsetzen spezieller Werte läßt sich sehr einfach daraus die gesuchte Höchstzahl der Schlüsselzüge berechnen.

Für m = 0, d = 1 geht der Laufindex $\iota = m+\nu d$ ($\nu = 1,2,\ldots\ldots \nu_p$) über in

$\iota = \nu$ ($\nu = 1,2,\ldots\ldots \nu_p$), und stellt damit den Laufindex der kontinuierlichen Coursierform vor. Es wird dann

$\nu/p = \frac{p - p \bmod 1}{1} = p$ und es folgt als Summe der Operationsmöglichkeiten für diese kontinuierliche Coursierform

$$N = 2^q \sum_{\iota=1}^{\iota=p} (n-v\iota)(n-u\iota) = 2^q \left[n^2 p - n(u+v) \sum_{\iota=1}^{\iota=p} \iota + uv \sum_{\iota=1}^{\iota=p} \iota^2 \right] \ldots\ldots \mathrm{I}$$

wo $u > v$ und q die Anzahl der bestehenden Dualitäten (Freiheiten) bedeutet und dank der gewählten Notation sofort an den Besonderheiten der beiden Indices der jeweiligen speziellen $A_{\iota\kappa}$ direkt abgelesen werden kann ohne daß, wie bei den folgend besprochenen Formeln von Dr. Fabel und Martin Kuehl die Hilfe der Anschauung in Anspruch genommen werden muß.

Der angegebene Ausdruck I deckt sich anscheinend vollständig mit dem von Dr. Fabel in Sphinx (1933,4) veröffentlichten

$$C(x,y) = 8 \sum_{t=1}^{t=E\frac{n-1}{x}} (n-tx)(n-qtx), \quad x > y, \quad y = qx$$

Es ist mir nicht bekannt, auf Grund welcher Überlegungen der genannte ~~Ausdruck~~ Autor zu diesem Ausdruck gelangt ist. Die Formel trägt jedenfalls nicht den geforderten ganz allgemeinen Charakter, da der Faktor 8 für eine große Anzahl von $A_{\iota\kappa}$ Operationen nicht stimmt und wie der Autor selbst erwähnt, für Figuren, die sich parallel zu den Seiten oder unter 45 Grad hiezu bewegen, die Hälfte des von der Formel gelieferten Wertes genommen werden muß, ganz abgesehen davon, daß Fälle nichtkommutativer und irreversibler Operationen keine Berücksichtigung gefunden haben und hier der Faktor andere Werte annimmt.

Auch die von Martin Kuehl angegebene Formel

$$C(x,y) = \frac{r}{6x^2} (n-p)\left[3nx(n-x+p) - y(n+x-p)(n-x+2p)\right]$$

$p = n \pmod{x}$, r = Anzahl der von einem Feld in Brettmitte theoretisch möglichen Zugrichtungen der betreffenden Figur, ist wie diese letztere Feststellung zeigt, zu sehr an die Anschauung gebunden und dringt nicht in den Kern der Sache ein, dem hier herrschenden Dualitätsprinzip.

Wohl aber beachtet Ausdruck I die strukturellen Eigentümlichkeiten des Problems, indem er neben den für jede Operation kennzeichnenden Bewegungsgrößen u, v sowohl den Ausdruck für die Anzahl der Freiheitsgrade (Dualitäten) enthält als auch in charakterisierenden Reihensummen des Laufindex aufgelöst erscheint, in die Reihensumme der ersten und zweiten Potenz des Lauf-Index, die je nach Eigenart der gewählten $A_{\iota\kappa} = A_{\nu\iota, \varkappa\iota}$ - Operation existenzfähig sind, oder beide oder zum Teil verschieden.

Es ist jedem, der sich mit Untersuchungen vorliegender Art, womöglich unter Zuhilfenahme der Anschauung, intensiver beschäftigt hat, ohneweiters klar, welche fast magische Bedeutung diese Reihensummen am Schachbrett haben, sodaß sich hier ihre nähere Erörterung erübrigt. Hier sei nur soviel erwähnt, daß Schulz auf diesem Gebiet hübsche zahlentheoretische Zusammenhänge gezeigt hat.

Im folgendem wird nun versucht, eine kurze, keineswegs erschöpfende Systematik der Untergruppe dritten Grades der allgemeinen $A_{\iota\kappa}$ Operation, also der Operation

$$A_{\nu\iota, \varkappa\iota}$$

zu geben, mit anderen Worten, eine Klassifikation der Figuren nach strengeren Gesichtspunkten als bei Dawson vorzunehmen.

Gleichzeitig wird an Hand der allgemeinen Gleichung I und unter Zuhilfenahme der entwickelten Notation die jeweilig gesamte Zahl der Operationsmöglichkeiten N (die " Höchstzahl der Schlüsselzüge" Dr. Fabels) berechnet.

$$N = 2^q \sum_{\iota=1}^{\iota=p} (n-v\iota)(n-u\iota)$$

oder:

$$N = 2^q \left[n^2 p - n(u+v)\sum_{\iota=1}^{\iota=p} \iota + uv \sum_{\iota=1}^{\iota=p} \iota^2 \right] \text{mit } u>v, \quad p = \frac{n-n(\bmod u)}{u}$$

q = Anzahl der Freiheitsgrade, abzulesen an der jeweiligen $A_{\iota\kappa}$ Operation.

Je nach dem vorliegenden besonderen Fall ist es bequemer, vom ersten oder zweiten Ausdruck auszugehen.

<u>Die Operation $A_{\iota\kappa}$ mit $i = v\iota$, $k = u\iota$</u>

I. <u>Einfache, kommutative Operationen</u> (unter anderem reversible Formen, das sind solche mit doppelter Zeichenzuordnung.)

1. <u>Der Laufindex beschränkt sich auf $\iota = 1$</u> Es wird $i = v, k = u$, geschrieben A_{vu} (Springer-Typ, "Sauteurs" laut Dawson) Wegen $u \neq v$ bleiben alle drei Dualitäten bestehen, also q = 3.

$N = 8(n-v)(n-u)$

a) bei v=1, u=2, geschrieben A_{12} (orthodoxer Springer)
$N = 8(n-1)(n-2)$

2. <u>Der Laufindex nimmt sämtliche Werte zwischen 1 und p an, $\iota = 1,2,\ldots\ldots p$</u>, geschrieben $A_{v\iota, u\iota}$ (Langschrittler, "Coursiers" laut Dawson)

Hier sind unter anderem folgende spezielle Fälle möglich:

α) $v = \pm 1$, $u = \pm 1$ Es wird $i = \pm\iota$, $k = \pm\iota$, geschrieben $A_{\iota\iota}$ (orthodoxer Läufer).
Wegen der Identität $\iota = \iota$ entfällt Dualität I, also q = 2; $p = \frac{n-n(\bmod 1)}{1} = n$

$$N = 2^2 \left\{ n^3 - 2n(1+2+\ldots.n) + 1.\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n \right\} = 2/3n(2n-1)(n-1)$$

β) $v=0$, $u = \pm 1$ Es wird $i = 0$, $k = \pm\iota$ geschrieben $A_{o\iota}$ (orthodoxer Turm).
Wegen Nullwerden eines Index entfällt Dualität II, also q = 2, p = n

$$N = 2^2 \left\{ n^3 - n(1+2+\ldots n) + 0.\sum \iota^2 \right\} = 2n^2(n-1)$$

c) $v = \pm 1, \quad u = \pm 2$ Es wird $i = \pm\ell$, $k = \pm 2\ell$, geschrieben $A_{\ell, 2\ell}$ Nachtreiter,

Wegen $\ell \neq 2\ell$ bleibt Dualität I und wegen zurechtbestehen beider Zeichen bei beiden Laufindices bleiben die beiden anderen Dualitäten erhalten.

$p = \frac{n - n(\text{mod.}\,2)}{2}$, d.h. für α) n gerade $p = \frac{n}{2}$

β) n ungerade $p = \frac{n-1}{2}$

α) n gerade,

$$N = 8\left\{\frac{n^3}{2} - 3n.\frac{1}{2}.\left(1 + \frac{n+1}{2}\right).\frac{n}{2} + 2.\frac{1}{6}(n+1).\frac{n+2}{2}.\frac{n}{2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{3}n(n-2)(5n-2)$$

β) n ungerade

$$N = 8\left\{\frac{n^2(n-1)}{2} - 3n.\frac{1}{2}\left(1 + \frac{n-1}{2}\right)\frac{n-1}{2} + 2.\frac{1}{6}.n\left(\frac{n-1}{2} + 1\right).\frac{n-1}{2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{3}n(n-1)(5n-7)$$

d) $v = \pm v, \; u = \pm u, \quad v,u \neq 0, \; v \neq u$

Es wird $i = \pm v\ell$, $k = \pm u\ell$, geschrieben $A_{v\ell,\, u\ell}$, allgemeiner Coursier), d.h. es bleiben alle drei Dualitäten erhalten, $q = 3$

$$N = 8\left\{(n-v)(n-u) + (n-2v)(n-2u) + \ldots.(n-pv)(n-pu)\right\} =$$
$$= \frac{4}{3}.p\left\{6\,n^2 - (p+1)\left[3(u+v).n - uv(2p+1)\right]\right\}$$
$$p = \frac{n - n(\text{mod}\;u)}{u}$$

II. <u>Zusammengesetzte kommutative Operationen</u> .

Unter anderem reversible Formen, das sind solche mit doppelter Zeichenzuordnung.

1. Der Laufindex beschränkt sich wie unter I,1 auf $\ell = 1$

a) Erste Teiloperation $v = 0$, $u = \pm 1$, zweite Teiloperation $v = \pm 1$, $u = \pm 1$, geschrieben

$A_{01,11}$ (König)

Bei der 1.Operation entfällt Dualität II wegen Nullwerden eines Index, also $q = 2$

Bei der 2.Teiloperation entfällt Dualität I wegen Identität $1 = 1$, $q = 2$

$$N = 2^2 n(n-1) + 2^2(n-1)^2 = 4(2n-1)(n-1)$$

2) Der Laufindex ℓ nimmt wie unter I,2 sämtliche Werte zwischen 1 und p an: $\ell = 1, 2, \ldots\ldots.p$

a) Erste Teiloperation $v = 0$, $u = \pm 1$, zweite Teiloperation $v = \pm 1$, $u = \pm 1$, geschrieben $A_{0\ell,\ell\ell}$

(Dame) Wir haben der Operation $A_{01,11}$ (König) isomorphe Verhältnisse:

Es entfällt bei der 1.Operation Dualität II, bei der 2.Operation Dualität I, $q = 2$.

$$A_{0\ell,} \quad = A_{0\ell} + A_{\ell\ell} = 2n^2(n-1) + \frac{2}{3}(2n-1)(n-1)n = \frac{2}{3}n(5n-1)(n-1)$$

b) Erste Teiloperation $v = 0, {}_{+}u = -1$,
zweite Teiloperation $v = \pm 1$, $u = +1$ geschrieben:

$A_{\overline{0-\ ,\ +}}$, (zweiter Schulz'scher Einbahner, Falke)

die Anzahl der verbleibenden Dualitäten bei den einzelnen Teiloperationen ist analog a), ebenso N

Zum Schluß soll versucht werden, bei einer beliebig aufgestellten Operation , von der bewußt vermieden wird, anschauungsmäßig zu untersuchen, welcher Figur sie entspricht, beziehungsweise welchem Bewegungsgesetz sie am Brette gehorcht, das N zu berechnen, um den Grad der hier gemachten Abstraktion und die gänzliche Unabhängigkeit des entwickelten Verfahrens von der Anschauung unter Beweis zu stellen.

Die Operation sei: $A_{+l-l,\ \overline{\pm l \pm (l+1),\ 0+1}}$

Erste Teiloperation A_{+l-l} Es entfällt Dualität II und III, Dualität I bleibt wegen Nichtidentität von $+l$ und $-l$ bestehen;

$q = 1,\ u = v_1 = 1$

$p = \frac{n-n(\mathrm{mod}\ 1)}{1} = n$

$$\underline{N_1} = 2^1\left[n^3 - n.2.\sum_{l=1}^{l=n} l + 1.\sum_{l=1}^{l=n} l^2\right] = \underline{\frac{1}{3}n(2n-1)(n-1)}$$

Zweite Teiloperation $A_{\overline{\pm l \pm (l+1)}}$ Es entfällt Dualität I und III, (da laut Notation nur Gleichsinnigkeit der Vorzeichen zulässig ist, also bei + nur $+(l+1)$, bei $-l$ nur $-(l+1)$, $q = 1$

Da $\psi(l) = l+1$ und laut Forderung Seite (3) $\psi(p) < n$, muß $p = n-2$ werden.

$$\underline{N_2} = 2^1 \sum_{l=1}^{l=n-2} (n-l)(n-l-1) = 2\left[(n-1)(n-2)+(n-2)(n-3)+\ldots 2.1\right] = \underline{\frac{2}{3}\ n(n-1)(n-2)}$$

Dritte Teiloperation $A_{\overline{0+1}}$ Es entfallen alle drei Dualitäten. $q=0$, $l=1$,

$$\underline{N_3} = 2^0(n-0)(n-1) = \underline{n(n-1)}$$

Somit $\underline{\underline{N = N_1+N_2+N_3}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}.n(n-1)(2n-1)}}$, eine Höchstzahl der Schlüsselzüge, die der des orthodoxen Läufers gleich ist.

Und nun eine anschauungsmäßige Untersuchung auf dem Brett. Sie lehrt uns, daß es sich um eine Figur handelt, die die Schrägen von links oben nach rechts unten und umgekehrt läuferartig, ferner die beiden, dem Standfeld ungleichfarbigen Schrägen nach rechts oben und links unten mit Ausnahme der unmittelbar oberhalb und unterhalb des Standfeldes befindlichen beiden ungleichfarbigen Felder ebenfalls läuferartig, aber nur in dem angeführten Richtungssinne beherrscht, und die außerdem wie ein Bauer jeweils um ein Feld nach aufwärts ziehen kann.

III. Nichtkommutative Operationen.

Unter anderem irreversible Formen, das sind solche mit beschränkter Vorzeichenzuordnung.
Unter den zusammengesetzten Operationen finden wir:

1. Der Laufindex beschränkt sich wie unter I,1 auf $\iota = 1$
   a) Erste Teiloperation $v = 0, u = +1$,
   zweite Teiloperation $v = \pm 1, u = +1$,
   geschrieben $A_{0+1,1+1}$ (Bauer)

   Bei A_{0+1} entfällt Dualität I wegen Nichtkommutativität, II wegen beschränkter Vorzeichenzuordnung, III wegen nicht Zutreffens von Gleichsinnigkeit und Ungleichsinnigkeit der Zuordnung, also $q = 0$ und

   bei A_{1+1} entfällt I wegen Nichtkommutativität, II wegen beschränkter Vorzeichenzuordnung, hingegen bleibt III erhalten, also $q = 1$, daher:

   $N = 2^0(n-o)(n-1) + 2^1(n-1)^2 = (n-1)(3n-2)$, welche Formel allerdings nur für einen Bauern gilt, der auch von der 1. ~~Lin~~ Reihe ziehen kann. Für die Verhältnisse des orthodoxen Schachs, bei dem der Bauer auf der 2. Zeile sein Standfeld hat, muß die Formel auf $N = (n-1)(3n-4)$ abgeändert werden.

2. Der Laufindex nimmt wie unter I,2 sämtliche Werte zwischen 1 und p ein, $\iota = 1,2,\ldots\ldots p$

   a) Erste Teiloperation $v = 0, u = +1$,
   zweite Teiloperation $v = \pm 1, u = -1$, geschrieben:

   $A_{0+\iota,\iota-\iota}$ (erster Schulz'scher Einbahner, Jäger)
   Wir haben der Operation $A_{0+1,1+1}$, (Bauer) isomorphe Verhältnisse

   Bei $A_{0+\iota}$ entfallen sämtliche drei Dualitäten
   Dualität I wegen Nichtkommutativität, abzulesen an: $A_{0+\iota}$
   Dualität II, da nur e i n Zeichen (Kennzeichen irreversibler Bewegung) zulässig ist.
   Dualität III, da wegen Nullwerden eines Index die Gleichsinnigkeit, beziehungsweise die Ungleichsinnigkeit der Zuordnung entfällt, also $q = 0$

   Bei $A_{\iota-\iota}$ entfallen 2 Dualitäten:
   Dualität I wegen Identität $\iota = \iota$
   Dualität II da nicht sowohl bei ι als auch bei $-\iota$ verschiedene Vorzeichen zulässig sind. (Kennzeichen der irreversiblen Bewegung, da bei ι beide, bei $-\iota$ nur das vorgesetzte Zeichen laut Notation zulässig sen ist), also $q = 1$

   $$N = 2^0 \sum_{\iota=1}^{\iota=n} n(n-\iota) + 2^1 \sum_{\iota=1}^{\iota=n} (n-\iota)^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n-1)(7n-2)$$

Die Gleichung: $N_n = 2^q \left\{ n^2 p - n(u+v) \sum_1^p \ell + uv \sum_1^p \ell^2 \right\} \ldots \mathrm{I}$

welche die Höchstzahl der Schlüsselzüge, die Summe der Operationsmöglichkeiten nach unserer Schreibweise, angibt, läßt auch eine andere Auffassung zu.

Angeregt durch eine sehr interessante Untersuchung von K.Schulz, der Zusammenhänge wie die folgenden zuerst für einige schachgerechte spezielle Fälle entwickelte, konnte nämlich unter anderem nachgewiesen werden, daß je nachdem, ob ℓ auf $= 1$ beschränkt bleibt (Kurzschrittler) oder $\ell = 1, 2, \ldots p$ $p = \frac{n - n(\mathrm{mod}\ u)}{u}$ (Langschrittler) wird, N_n, [die Summe der Operationsmöglichkeiten der Operation $A_{u\ell, v\ell}$ bei n^2 Wertepaaren (ab), also die Höchstzahl der Schlüsselzüge auf dem Brette mit der Seitenlänge n], bei geradem n, sich als das Glied y_m einer mit N_2 beginnenden Reihe $y_0 = N_2$, $y_1 = N_4$, $y_2 = N_6$ $y_3 = N_8 \ldots\ldots\ldots y_m = N_n$ zweiter oder dritter Ordnung darstellen lassen läßt, mit anderen Worten

II.) $N_n = y_0 + \binom{m}{1} \Delta y_0 + \binom{m}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{m}{3} \Delta^3 y_0$ für $\ell = 1, 2, \ldots p$, wo:

III.)

$$\begin{cases} y_0 = N_2 = 2^q \left\{ \frac{1}{u}(8-4r) - \frac{u+v}{2u^2}\left[2u(2-r) - 2r(4-r) + 8\right] + \right. \\ \qquad \left. + \frac{uv}{6u^3}\left[u^2(2-r) + 3u(4-4r+r^2) - 2r(12-6r+r^2) + 16\right] \right\} \\ \Delta y_0 = 2^q \left\{ \frac{1}{u}(56-12r) - \frac{u+v}{2u^2}\left[2u(6-r) - 2r(12-r) + 56\right] + \right. \\ \qquad \left. + \frac{uv}{6u^3}\left[(2u^2 + 12u(3-r) - 12r(6-r) + 112\right] \right\} \\ \Delta^2 y_0 = 2^q \left\{ \frac{1}{u}(96-8r) - \frac{u+v}{2u^2}(8u-16r+96) + \frac{uv}{6u^3} \cdot (24u-48r+102) \right\} \\ \Delta^3 y_0 = 2^q \cdot 8 \left[\frac{6}{u} - 3 \cdot \frac{u+v}{u^2} + 2\frac{uv}{u^3} \right] = 2^q \cdot \frac{8}{u}\left(3 - \frac{v}{u}\right) \end{cases}$$

$$m = \frac{n}{2} - 1, \quad u > v, \quad r = n(\mathrm{mod}\ u)$$

und

$N_n = y_0 + \binom{m}{1} \Delta y_0 + \binom{m}{2} \Delta^2 y_0$ für $\ell = 1$, wo

IV. $\begin{cases} y_0 = N_2 = 2^q \left\{ 4 - 2(u+v) + uv \right\} \\ \Delta y_0 = 2^q \left[12 - 2(u+v) \right] \qquad \Delta^2 y_0 = 2^q \cdot 8 \qquad m = \frac{n}{2} - 1 \end{cases}$

Ähnliche Ausdrücke lassen sich entwickeln, wenn man N_n als das Glied y_m einer mit $y_0 = N_1$ beginnenden Reihe $N_1, N_2, N_3 \ldots$ (also n beliebig ganze Zahl) oder als das Glied y_m einer mit y_0 beginnenden Reihe N_1, N_3, N_5 (also ungeraden n) darstellt.

Die Bedeutung aller dieser Ausdrücke liegt naturgemäß nicht auf dem Gebiete der praktischen Berechnung von N. Sie gestatten vielmehr nach einer anderen Richtung wertvolle zusätzliche Eiblicke in die Struktur der hier behandelten Probleme.

Beschränkt man nämlich in weiterer logischer Verfolgung des dualen Prinzips im Schach die Betrachtung nur auf gerades n, hält man also nur den eingangs für gerades n entwickelten Ausdruck fest, so wird für Langschrittler ($\iota = 1,2,\ldots p$) N_n das allgemeine Glied y_m einer Reihe dritter Ordnung, wo zur Charakterisierung ihres Aufbaues bis zur dritten Differenzenreihe, also bis zur Fixierung des $\Delta^3 y_0$ = konstant vorgeschritten werden muß.

Da, beginned mit N_2, hiezu 4 Reihenglieder zu entwickeln sind, ist die Reihe und damit das N_n mit der Durchforschung von N_2, N_4, N_6, N_8 hinreichend charakterisiert.

Die Schlüsselstellung des Normalbrettes n = 8 bei Festhaltung des dualen Prinziges erfährt dadurch eine ganz besondere Vertiefung.

Da ~~bereits~~ weiters für das Zurechtbestehen der hier geforderten Reihe dritter Ordnung neben der bereits ins Auge gefaßten Konstanz von $\Delta^3 y_0$ auch dessen Ganzzahligkeit notwendig ist, Letzteres aber, wie aus

$$V.\quad \Delta^3 y_0 = \frac{2^{q+3}}{u}\left(3 - \frac{u}{v}\right),\quad u > v \text{ in } A_{v\iota,u\iota},\quad \iota = 1,2,\ldots p$$

ersichtlich ist, von den Bewegungsgrößen u und v in $A_{v,u}$ abhängig sind, folgt zwingend, daß nur bei passender Wahl dieser vektoriellen Größen Ganzzahligkeit von y_0, bei gleichzeitiger Beobachtung von $N_2 = y_0 \leqq 0$, gegeben ist und die obige Deutung ihren Sinn behält.

Die hier gewonnenen Ergebnisse lassen sich noch weiter verallgemeinern und vertiefen, doch würde dies den Raum der Arbeit überschreiten. Soviel läßt sich immerhin auf Grund des bisher Gesagten erkennen, daß bedeutende, strukturelle bedingte Wechselwirkungen zwischen der Bewegungscharakteristik (den Kraftlinien) einer Figur und dem ihr zugewiesenen Raum bestehen.

Es läßt sich also aus dem Ausdruck V mit Bestimmtheit voraussagen, daß bei Festhalten am dualen Prinzip neben den orthodoxen Langschrittlern, deren u,v sämtliche der Ganzzahligkeit von $\Delta^3 y_0$ genügen, und den meisten Märchenfiguren, nur eine ganz beschränkte Anzahl ausgezeichneter

Figuren diese Ganzzahligkeit und $N_2 \geqq 0$ erfüllt und damit in einem gewissen. ~~Sinne~~ heute noch nicht ganz ausschöpfbaren Sinne dem Normalbrett irgendwie strukturell angepaßt erscheinen wird, während für Kurzschrittler ($\iota = 1$) laut IV gänzliche Unabhängigkeit von $\Delta^2 y_0$ von den Bewegungsgrößen besteht. Mit anderen Worten, erst bei Hinzutreten des skalaren zum vektoriellen Moment eines bestimmten Bewegungsgesetzes, das heißt erst bei Lösung der den Kurzschrittlern aufgelegten Fesseln und seiner Befreiung zum Langschrittler treten bestimmte Wechselwirkungen zwischen Raum und Kraft auf und ist die Struktur des Raumes in gewissem Sinne und mit gewissen, hier nicht näher zu erörternden Beschränkungen mit bestimmend für die innerhalb dieses Raumes wirksamen Kräfte, sollen die geforderten Grundsätze, vor allem das der Dualität, erhalten bleiben.

In diesem Zusammenhange bietet eine systematische Durchforschung der Kombinationsmöglichkeiten aufgehobener und bestehen~~der~~ bleibender Dualitäten an Hand unserer Notation größtes Interesse.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

Dualität I, erzeugt durch Vertauschbarkeit von i und k - aufgehoben wurde sie:

a) durch Identität beider Indices i = k
b) bei Nichtidentität, wenn Nichtkommutativität besonders gefordert wurde.

Dualität II, erzeugt durch doppelte Vorzeichenzuordnung sowohl an i als auch an k.

aufgehoben wurde sie:

a) wenn der eine der beiden Indices gleich Null wird,
b) wenn in besonderen Fällen bei einem oder bei beiden Indices nur 1 Zeichen zulässig ist.

Dualität III, erzeugt durch Gleichsinnigkeit und Ungleichsinnigkeit der Zuordnung der beiden Vorzeichen an i und k.

aufgehoben wurde sie:

a) wenn nur e i n e Zuordnung möglich ist.
b) wenn nur eine Zuordnung ~~möglich~~ gefordert wurde.

Die jeweiligen Fälle a und b sind isomorph: a bedeutet Trivialwerden infolge Annahme besonderer Werte, b trägt definitorischen Charakter.

Die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten berechnet sich aus der Überlegung, daß die Anzahl der Freiheitsgrade, das ist die Anzahl der bestehend bleibenden Dualitäten $q = 3,2,1,0$ werden kann, ~~zwischen~~ zu $\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\binom{3}{1}+\binom{3}{0} = 8 = 2^3$,

eine Zahl die wiederum ebenso auf die überragende Stellung des Dualitätsprinzipes im Schach hinweist, wie die Anzahl der Aufhebungsmöglichkeiten jeder Dualität.

Wir erhalten so etwa folgende Übersicht, die keineswegs Anspruch auf Vollständigkeit erhebt.

[illegible] grade	Kombination	DUALITÄT erzeugt durch: I. Kommutativität: existensfähig	I. Kommutativität: nicht existf. infolge	II. Doppelte Vorzeichen: existensfähig	II. Doppelte Vorzeichen: nicht existf. infolge	III. Gleichsinnigkeit und Ungleichsinnigkeit: existensfähig	III. Gleichsinnigkeit und Ungleichsinnigkeit: nicht existf. infolge	Beispiele und Notationen
3	I II III	/		/		/		A_{ik}
	I II			/			a	
		/		/			b	$A_{\pm i \pm k}$, $A_{\mp i \pm k}$
2	I III	/			a	/		A_{oi}
		/			b	/		A_{i-k}, A_{+ik}
	II III		a	/		/		A_{ii}
			b	/		/		$A_{\overline{ik}}$
1	I	/			a		a	A_{o+i}
		/			b		a	A_{+i-k}, A_{+i-i}
	II		a	/			b	$A_{\pm i \pm i}$
			b	/			b	$A_{\overline{\pm i \pm k}}$
	III		b		a	/		$A_{\overline{oi}}$
			b		b	/		$A_{\overline{i-i}}$, $A_{-\overline{ik}}$
0			a		b		a	A_{+i+i}
			b		a		a	$A_{\overline{o+i}}$
			b		b		b	$A_{+\overline{i-i}}$, $A_{-\overline{i+k}}$

Berücksichtigt man weiters die Fülle der A_{ik} - Operationen, die sich durch Wahl verschiedener i und k ergeben, indem nämlich $i = \varphi(\iota)$, $k = \psi(\iota)$ gesetzt werden kann, wo ferner ι auf $\iota = 1$ beschränkt oder die laufenden Werte $\iota = 1,2,....p$ (kontinuierliche Langschrittler) oder die Werte $\iota = m, m+d, m+2d......p$ (diskontinuierliche Langschrittler annehmen kann, zieht man ferner die Zusammensetzungsmöglichkeit im Sinne von $A_{\iota k} + A_{\iota' k'} = A_{\iota k, \iota' k'}$ in Betracht, die insbesonders bei Operationen mit beschränktem Freiheitsgrad zwecks Erweiterung der Operationsmöglichkeiten von Bedeutung ~~sind~~ und erweitert man die Möglichkeiten durch Forderung von Kongruenz beziehungsweise Nichtkongruenz von Zug- und Schlagrichtung bei diesen zusammgesetzten Operationen, so erhält man einen schwachen Schimmer der ungeheueren Möglichkeiten.

Es wird so auch klar, daß die orthodoxen und im großen und ganzen auch die Märchenfiguren den Rahmen einiger weniger speziellen Fälle dieser Möglichkeiten nicht überschreiten.

<u>Als Abschluß nochmals kurze Zusammenfassung unserer Systematik:</u>

<u>A_{ik}-Operation 1.Ordnung:</u> Allgemeinste A_{ik}-Form, wo i,k = 0,1,2,....n-1 alle Werte durchlaufen (Panfigur)

<u>Operation 2.Ordnung:</u> $i = \varphi(\iota)$, $k = \psi(\iota)$ (allgemeinste Märchenform) i und k nehmen nur ganz bestimmte Werte an und werden in gesetzmäßigerweise durch ~~laufen~~ Lauf-Index ι koordiniert. Hiebei haben die Konstanten in den Funktionen und als für die betreffende Operation (Figur) kennzeichnende Bewegungsgrößen vektorielle Bedeutung, sind also ein Ausdruck für die Bewegungscharakteristik der betreffenden Figur. Der Laufindex ι, der selbst wieder eine Funktion von ν ($\nu = 0,1,2,...... \nu_p$) sein kann, ist hingegen skalarer Natur und ein Ausdruck für die Reichweite und den Rythmus der Bewegung.

<u>Operation 3.Ordnung:</u> $\varphi(\iota) = u.\iota$, $\psi(\iota) = v.\iota$

$u,v \gtreqless 0$ (ganze Zahlen)...allgemeinste Coursierform.

a) Einteilung im skalarem Sinne $\iota = m+\nu d$, $\nu = 1,2,.....\nu_p$

α) m,d $\neq$ 0 diskontinuierliche Form } des langschrittigen

β) m = 0,d = 1 kontinuierliche Form } Coursiers, bei $\nu = 1,2,.......\nu_p$

γ) m=0,d=1,ν=1 Sauteurtyp, Kurzschrittler

b) Einteilung nach dem Dualitätsprinzip, siehe Tabelle Seite 13; unter anderem:

α) Kommutative Form, wo $A_{ik} = A_{ki}$ und nichtkommutative Form, wo $A_{\overline{ik}} \neq A_{ki}$

β) reversible Form, wo beide Indices i,k sowohl positive als auch negative Werte annehmen und irreversible Form, wo die doppelte Vorzeichenzuordnung beschränkt oder gänzlich unzulässig ist.

γ)

c) Einteilung nach der Anzahl und Art der zugelassenen Teiloperationen

α) Einfache Formen, A_{ik}

β) zusammengesetzte Formen, A_{ik}, $i'k'$, $i''k''$,

αγ) Kongruenz von Zug-und Schlagrichtung, A_{ik}, $A_{i'k'}$

βγ) Nichtkongruenz von Zug-und Schlagrichtung $A_{\underline{ik}}$, $A_{\underline{i'k'}}$, das heißt 1.Teiloperation nur ziehend, 2.Teiloperation nur schlagend.

In der hier gegebenen, nur kurz umrissenen und nach verschiedensten Richtungen ausbaufähigen Systematik sollte der Versuch unternommen werden, eine Erweiterung der Dawson'schen Klassifikation nach strengerem Gesichtspunkt als dort behandelt zu geben, die in ihr enthaltene Notation, die auf den 3 im Dualitätsprinzip des Schachs begründeten, weiter oben erwähnten Freiheiten fußt, sollte weiters gewissermaßen nach gruppentheoretischen Gesichtspunkten die Struktur des Schachs beleuchten und es gestatten, in einfacher, von der Anschauung völlig unabhängigen Weise nicht nur die Frage nach der Höchstzahl der Schlüsselzüge, sondern auch verschiedene andere mit dem Schach zusammenhängende Fragen zu behandeln.

So wird unter anderem jede Erweiterung des bestehenden Figurenschatzes durch Schaffung neuer Märchenfiguren dem aus der Notation ohneweiters fließenden, im tiefsten Wesen des Schachs begründeten, dominierenden Dualitätsprinzip Rechnung tragen müssen, soll sich die neu geschaffene Figur organisch dem bereits bestehenden Figurenmaterial einordnen. Erwähnt sei hier nur kurz, daß uns die erstmalig 1942 in der zitierten Arbeit aufgestellte Notation in Unkenntnis der Dawson'schen Arbeit, Schwalbe 1929, Seite 270,303,320 entstanden ist, die mir bruchstückweise erst durch die mir im Dezember 1945 zugesandte Fabel'sche Arbeit in Sphinx 1933,Nr.4 zugänglich wurde.

Der wesentlichste Fortschritt gegenüber der Dawsonschen Symbolik müßte einmal in der strukturell getreuen Ausformung der die einzelnen Typen kennzeichnenden mathematischen Größen und damit Vereinheitlichung der Schreibweise für Sauteur- und Coursiertyp erblickt werden.

In der Schreibweise $A_{\nu,\mu}$ treten neben den auch bei Dawson vorhandenen und dort mit x,y bezeichneten, für jede Figur charakteristischen Bewegungsgrößen u,v der Laufindex ι auf, der nach einheitlichen Gesichtspunkten eine Notation aller in Frage kommenden Operationen (Figuren) gestattet. Für ι = 1 haben wir nämlich Kurzschrittler im allgemeinen und Sauteurs im besonderen, für ι = 1,2,....p kontinuierliche Langschrittler im allgemeinen und Coursiers im besonderen.

Durch Wahl der unterschiedlichen Symbolik S(x,y) und C (x,y) wird es hingegen wenig durchsichtig, daß, mathematisch gesehen, der Sauteurtyp nur einen speziellen Fall des Coursiertyps darstellt. Die Auffassung der Zahlen x,y ist weiters nicht einheitlich, bedeuten diese Zahlen, mathematisch gesehen, in beiden Symbolen nicht dasselbe - im ersten Falle Koordinaten, im 2. Falle Richtungskoeffizienten. Demgegenüber stellen in unserer Notation die Komplexindices $\nu\iota$, $u\iota$ selbst wieder nur spezielle Fälle der algebraischen Funktion $\varphi(\iota)$, $\psi(\iota)$ dar und diese wieder nur den besonderen Fall der allgemeinen Indices i und k, wodurch der streng logische Aufbau des Systems deutlich hervortritt.

Ansätze zu diesem von uns verwendeten Index finden sich durch Einführung von y = qx in C (x,y) allerdings auch bei Dr. Fabel und Martin Kuehl, doch dient diese Einführung dort lediglich der Berechnung der Höchstzahl der Schlüsselzüge N, unter Verzicht auf Interpretation dieses unserem ι entsprechenden x als wichtigem Bauelement der gesamten Klassifikation. Weiters fehlt der Dawson'schen Symbolik jene Verfeinerung der hier entwickelten Notation, die, wie weiter oben gezeigt, die Kombinationsmöglichkeiten der Freiheitsgrade des Dualitätsprinzipes erfaßt und damit die wichtigste Voraussetzung schafft für die Einführung der Begriffe " kommutative, nichtkommutative, reversible und irreversible Operationen "und so in fruchtbarer Weise richtungsgebend wird für die Schaffung interessanter neuer Märchenfiguren.

Es werden diese Begriffe zwar in den verschiedenen, diesbezüglichen Arbeiten zum Teil auch behandelt, doch fehlt die an eine einheitliche, nach logischen Grundsätzen aufgebaute und durchsichtige Notation geknüpfte Systematik.

Die Wahl einer entsprechenden Notation - oft nur ein glücklicher Griff - macht, wie die Entwicklung der Mathematik beispielsweise im Falle des dekadischen Systems und der Differenzialrechnung in geradezu klassischer Weise zeigt, die Behandlung weiter Bezirke der Mathematik erst in einfacher Weise zugänglich. Der passende Algorithmus (Colerus) wird zum Schlüssel für eine fast mechanische Abschnurrung rechnerischer Vorgänge und damit zur Lösung von Problemkomplexen, die sonst nur durch schwierigste Denkprozesse bewältigt werden können.

ANHANG

Aus der allgemeinen Formel: $N = 2^q \left\{ n^2 p - n(u+v) \sum_{l=1}^{l=p} l + uv \sum_{l=1}^{l=p} l^2 \right\}$ lassen sich noch einige interessante Beziehungen ableiten.

Wird der Laufindex l auf $l = 1$ beschränkt, so entfällt die Aufsummierung und wir haben ein N von der Form:

$$N = A_1 n^2 + B_1 n + C_1$$

Kann jedoch der Laufindex l sämtliche Werte zwischen 1 und p durchlaufen, so erhält N, da in den Summenformeln n in der zweiten, bzw. dritten Potenz auftritt, die Form:

$$N = A_l n^3 + B_l n^2 + C_l n + D_l$$

Bezieht man das N eines beliebigen Steines X, bei dem l auf $l = 1$ beschränkt bleibt, auf das N eines ~~bestimmten~~ Steines, bei dem l ebenfalls auf $l = 1$ beschränkt bleibt, z.B. auf den König, bildet man also

$$\frac{N_X}{N_K} = \frac{A_1 n^2 + B_1 n + C_1}{A_1' n^2 + B_1' n + C_1'} = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \dots ,$$

so ergibt sich, daß mit wachsendem n das Verhältnis der Gesamtzahl der Schlüsselzüge beider Steine einem bestimmten endlichen Grenzwert zustrebt, da

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_X}{N_K} \rightarrow A$$

Bezieht man andererseits das N eines beliebigen Steines Y, bei dem $l = 1, 2, \dots p$ werden kann, auf den König, bildet man also:

$$\frac{N_Y}{N_K} = \frac{A_l n^3 + B_l n^2 + C_l n + D_l}{A_1' n^2 + B_1' n + C_1'} = A'n + B' + \frac{C'}{n} + \frac{D'}{n^2} + \dots\dots$$

so geht daraus hervor, daß mit wachsendem n das Verhältnis über alle Grenzen wächst, da

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_Y}{N_K} \rightarrow \infty$$

Um in solchen Fällen einen endlichen Wert zu erhalten, muß man den fraglichen Stein Y auf einen bestimmten anderen mit wieder $l = 1, 2, \dots p$ beziehen. Das heißt zusammengefaßt mit anderen Worten:

Das Verhältnis der Gesamtzahl der Schlüsselzüge zweier Kurzschrittler ($l = 1$) und dieser Gesamtzahl zweier Langschrittler ($l = 1, 2, \dots p$) zueinander strebt mit wachsendem n (wachsender Brettgröße) einem bestimmten festen Grenzwert zu. Bezieht man jedoch die Anzahl der Schlüsselzüge eines Langschrittlers auf diejenige eines Kurzschrittlers, so hat dieses bei endlichem n zwar auch einen endlichen Wert, es wächst aber mit wachsender Brettgröße immer mehr, um bei unbegrenzt wachsendem n über alle Maßen zu wachsen.

Man kann diese Tatsache neben dem bereits oben erwähnten Kriterium ($\ell = 1$ oder $\ell = 1,2,\ldots p$) und die Tatsache, daß n in N zweidimensional bei Kurzschrittlern und dreidimensional bei Langschrittlern wird, geradezu als Kriterium für Kurz- und Langschrittigkeit ansehen.

Schulz hat in einer hübschen Arbeit gezeigt, wie die gesamte Anzahl der Schlüsselzüge ("Agilitätszahl") bei kleinen Brettgrößen um ein geringes kleiner oder größer oder gleich der des Königs ist, wie dann mit allmählich wachsendem n die verschiedenen Langschrittler je nach ihrer Agilität die Schlüsselzüge des Königs erreichen und überschreiten, und wie schließlich dann mit weiter wachsender Brettgröße eine allmähliche Differenzierung zwischen Kurz-und Langschrittler eintritt, indem erstere sich in ein festes endliches Verhältnis zur Agilitätszahl des Königs setzen, während letztere sich von diesem immer mehr, auch hier wieder je nach Agilität distanzieren.

Wir können endlich als Brett mit der kritischen Seitenzahl n_k dasjenige bezeichnen, bei welchem die Gesamtzahl der Schlüsselzüge eines Langschrittlers oder Kurzschrittlers erstmalig die Schlüsselzahl des Königs erreicht und hiemit ein weiteres sehr anschauliches Charakteristikum gewinnen. Man erhält n_k durch Gleichsetzung von N_x mit N_K und Isolierung von n.

Hallein, den 6. Februar 1945